desigualdades con esteroides

AlanLG

5 de abril del 2024

§1 Lectura

Empezamos con problablemente el resultado más conocido de desigualdades, y es la desigualdad de medias, muchos problemas de desigualdades pueden ser atacados con esto de alguna manera, incluso problemas muy complejos.

Teorema 1.1 (Desigualdad de medias)
Sean $x_1, x_2, \cdots x_n \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Podemos generalizar un poco la famosa desigualdad de $AM - GM$ con el siguiente enunciado

Teorema 1.2 (Weighted $AM - GM$)
Si $w_1 + \cdots w_n = w$ y $x_i \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\frac{w_1 x_1 + \cdots w_n x_n}{w} \geq \sqrt[w]{x_1^{w_1} \cdots x_n^{w_n}}$$

Igualdad cuando $x_1 = \cdots = x_n$ y $w_1 = \cdots = w_n = 1/n$.
En particular si $w_1 + \cdots w_n = 1$ entonces

$$w_1 x_1 + \cdots w_n x_n \geq x_1^{w_1} \cdots x_n^{w_n}$$

Un problema famoso (y muy odiado) donde se usa este resultado es en el problema 2 de la IMO del 2020

Ejemplo 1.3 (IMO 2020/2)
Sean a, b, c, d números reales tales que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ y $a + b + c + d = 1$. Prueba que

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

Solución de Evan. La expresión $a^a b^b c^c d^d$ puede resultar muy rara, pero note que por

Weighted $AM - GM$ tenemos que

$$a^a b^b c^c d^d \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Nota que, como $a + b + c + d = 1$, entonces acabamos si demostramos lo siguiente

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < (a + b + c + d)^3$$

De aquí solo queda expandir y simplificar términos, lo cuál es aún bastante largo, pero ya no se necesita de nada más, al expandir queda

$$\begin{array}{cccc} +a^3 & +b^2a & +c^2a & +d^2a \\ +2a^2b & +2b^3 & +2b^2c & +2d^2b \\ +3a^2c & +3b^2c & +3c^3 & +3d^2c \\ +4a^2d & +4b^2d & +4c^2d & +4d^3 \end{array} < \begin{array}{cccc} +a^3 & +3b^2a & +3c^2a & +3d^2a \\ +3a^2b & +b^3 & +3b^2c & +3d^2b \\ +3a^2c & +3b^2c & +c^3 & +3d^2c \\ +3a^2d & +3b^2d & +3c^2d & +d^3 \\ +6abc & +6bcd & +6cda & +6dab \end{array}$$

Entonces cancelamos algunos términos y queda

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ & +b^3 & & \\ & & +2c^3 & \\ +a^2d & +b^2d & +c^2d & +3d^3 \end{array} < \begin{array}{cccc} & +2b^2a & +2c^2a & +2d^2a \\ +a^2b & & +b^2c & +d^2b \\ & & & \\ +6abc & +6bcd & +6cda & +6dab \end{array}$$

Lo cuál es cierto pues

$$2b^2a \geq b^3 + c^2d \qquad 2c^2a \geq 2c^3 \qquad 2d^2a \geq 2d^3 \qquad a^2b \geq a^2d \qquad b^2c \geq b^2d \qquad d^2b \geq d^3$$

$\square$

Veamos ahora un famoso resultado llamado *Power Mean*, es la versión generalizado de todas las desigualdades de medias; la primera vez que ví este resultado no podía creer que algo así existiera

Teorema 1.4 (Power Mean Inequality)

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $w_1, w_2, \ldots w_n$ reales positivos con $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$, para cada $r \in \mathbb{R}$ definimos

$$\mathbb{M}_r(a_1, a_2, \ldots a_n) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} & \text{si } r \neq 0 \in \mathbb{R} \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

entonces si $p > q$, se tiene que

$$\mathbb{M}_p \geq \mathbb{M}_q$$

Igualdad cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

wow, realmente es un enunciado fácil de citar; pero si no te has dado cuenta de su utilidad, mira cuanto valen $\mathbb{M}_r$ para algunas r

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \geq & 1 & \geq & 0 & \geq & -1 \\ \mathbb{M}_2\left(x_1,\ldots,x_n\right) & \geq & \mathbb{M}_1\left(x_1,\ldots,x_n\right) & \geq & \mathbb{M}_0\left(x_1,\ldots,x_n\right) & \geq & \mathbb{M}_{-1}\left(x_1,\ldots,x_n\right) \\ \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2}{n}} & \geq & \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n} & \geq & \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} & \geq & \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \end{array}$$

De modo que este teorema implica por si solo cada desigualdad de medias.
Pero por si fuera poco, también existe la **Weighted Power Mean Inequality** (Estoy poniendo los nombres en inglés porque no encontré un nombre en español), que es una mega generalización de las desigualdades de media, y se enuncia como sigue

Teorema 1.5 (Weighted Power Mean Inequality)
Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reales positivos para cada $r \in \mathbb{R}$ definimos

$$\mathbb{M}_r(a,w) = \begin{cases} (w_1a_1^r + w_2a_2^r + \cdots + w_na_n^r)^{\frac{1}{r}} & \text{si } r \neq 0 \in \mathbb{R} \\ a_1^{w_1}a_2^{w_2}\cdots a_n^{w_n} & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

entonces si $p > q$, se tiene que

$$\mathbb{M}_p \geq \mathbb{M}_q$$

Igualdad cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Veamos ahora la desigualdad de Hölder, que es una versión fuerte de la famosa desigualdad de *Cauchy-Schwartz*

Teorema 1.6 (Desigualdad de Hölder)
Para secuencias $a_i, b_i, \ldots, z_i$ y $\lambda_a + \lambda_b + \cdots + \lambda_z = 1$ se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{\lambda_a} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{\lambda_b} \cdots \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^{\lambda_z} \geq \sum_{i=1}^n a_i^{\lambda_a} b_i^{\lambda_b} \cdots z_i^{\lambda_z}$$

La igualdad se da si $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n = \cdots = z_1 : z_2 : \cdots : z_n$

Prueba. Notemos que podemos asumir sin pérdida de la generalidad que $\sum a = \cdots \sum z = 1$, de modo que basta probar que el lado derecho es menor que 1, pero note que por Weighted $AM - GM$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n a_i^{\lambda_a} b_i^{\lambda_b} \cdots z_i^{\lambda_z} \leq \sum_{i=1}^n (\lambda_a a_i + \lambda_b b_i + \cdots + \lambda_z z_i) = 1$$

$\square$

Ejemplo 1.7
Prueba que

$$9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)^3$$

Prueba. Por Hölder nota que

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)^{\frac{1}{3}}\cdot(1+1+1)^{\frac{1}{3}}\cdot(1+1+1)^{\frac{1}{3}}\geq(a+b+c)$$

Elevando al cubo y reordenando obtenemos lo deseado

$\square$

> **Nota.** La desigualdad anterior se puede probar fácilmente con Weighted Power Mean usando que $\mathbb{M}_3\left(a+b+c\right)\geq\mathbb{M}_1\left(a+b+c\right)$

Ejemplo 1.8 (IMO 2001/2)
Prueba que para todos reales positivos a,b,c se cumple

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

Prueba. Por Hölder se tiene que

$$\left(\sum_{cyc}a(a^2+8bc)\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^{\frac{2}{3}}\geq(a+b+c)$$

Entonces basta probar que

$$(a+b+c)^3\geq\sum_{cyc}a(a^2+8bc)=a^3+b^3+c^3+24abc$$
$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

Lo cuál se sigue por AM-GM $\square$

Veamos por último un teorema fácil de citar pero realmente impresionante

Teorema 1.9 (Desigualdad de Minkowski)
Definamos la norma L_p para $p\geq 1$ como $||x||_p=\sqrt[p]{|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p}$, entonces

$$||x||_p+||y||_p\geq||x+y||_p$$

Esta desigualdad es como una versión fuerte de la desigualdad del triángulo. Veamos la demostración clásica de este teorema

Prueba. Nota que

$$\sum_{k=1}^{n}(x_n+y_n)^p=\sum_{k=1}^{n}x_k(x_k+y_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}y_k(x_k+y_k)^{p-1}$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\leq}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]+\left[\left(\sum_{k=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

Reacomodando llegamos a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n}(x_n + y_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Que es precisamente lo deseado □

Ejemplo 1.10 (AIME 1991)

Para un entero positivo n, define S_n como el valor mínimo de la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos cuya suma es 17. Existe un único entero positivo n para el cual S_n también es un número entero. Encuentra este valor de n.

Solución. Nota que por la desigualdad de Minkowski, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2} &\geq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2} \\ &= \sqrt{n^4 + 17^2} \end{aligned}$$

Solo queda ver cuándo $\sqrt{n^4 + 17^2} \in \mathbb{Z}$ lo cuál es sencillo.

§2 Problemas

Problema 2.1. En contruccción...

§3 Hints

2.1. En contruccción...