series telescópicas

AlanLG

6 de mayo

§1 Lectura

Al momento de evaluar una operación de varios términos, nos podemos apoyar en técnicas de cancelar algunos de estos, es aquí donde aparacen las series telescópicas, no hay mucha teoría en esto, se trata de hacer una adecuacda manipulación algebraica, resolver varios problemas te dará una idea de que se debe hacer en cada caso. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1.1
Halle el valor del producto

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{81}\right)$$

Tutorial. Hacer individualmente cada producto sería muy cansado, asi que vamos a pensar en algo más inteligente

(a) !Factoriza!

(b) Trata de cancelar numeradores y denominadores de forma inteligente

Ejemplo 1.2
Encuentra el valor de

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

Tutorial.

(a) Nota que el término general es $\frac{1}{k(k+1)}$

(b) $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)}$

(c) $\frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{(k+1)}{k(k+1)} - \frac{k}{(k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

(d) Sustituye para cada término y la suma te queda

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

(e) Casi todos los término se cancelan. ¿Cuáles quedan?

§2 Problemas

Problema 2.1. Encuentra el valor de

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2024}$$

Problema 2.2. Encuentra el valor de

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{2021\times 2023}$$

Problema 2.3. Calcula

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Problema 2.4. Evalua

$$\sum_{n=1}^{2023}\frac{1}{n^2+3n+2}$$

Problema 2.5. Encuentra el valor de

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+2023\cdots 2023!$$

Problema 2.6. Demuestra que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{F_{k-1}F_k}<1$$

para todo n. Donde F_n representan a los términos de la sucesion de Fibonacci, con $F_0=1, F_1=1$ y $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$

Problema 2.7. Calcula el valor de

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2023\sqrt{2024}+2024\sqrt{2023}}$$

Problema 2.8 (2019 AMC12)**.** Sea $f(x)=x^2(1-x)^2$. ¿Cuánto vale la siguiente suma?

$$f\left(\frac{1}{2019}\right)-f\left(\frac{2}{2019}\right)+f\left(\frac{3}{2019}\right)-f\left(\frac{4}{2019}\right)+\cdots+f\left(\frac{2017}{2019}\right)-f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

Problema 2.9 (1999 Estonia MO)**.** Dado $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, encuentra el valor de

$$f\left(\frac{1}{2000}\right)+f\left(\frac{2}{2000}\right)+\cdots+f\left(\frac{1999}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{2000}\right)+f\left(\frac{2000}{1999}\right)+\cdots+f\left(\frac{2000}{1}\right)$$

Problema 2.10. Encuentra el valor de

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

Problema 2.11. Calcula el valor de

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3^2-1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99+\sqrt{99^2-1}}}$$

Problema 2.12. Evalúa la suma

$$\sum_{k=1}^{9999}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}$$

Problema 2.13 (1999 USAMTS)**.** Encuentra el valor de la expresión

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2023^2}+\frac{1}{2024^2}}$$

Problema 2.14 (2011 IMC)**.** Las raíces de $x^2-2x-a^2-a=0$ son $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_3,\beta_3),\ldots(\alpha_{2010},\beta_{2010}),(\alpha_{2011},\beta_{2011})$ cuando $a=1,2,\ldots,2011$ respectivamente. Evalúa

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\frac{1}{\beta_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{2010}}+\frac{1}{\beta_{2010}}+\frac{1}{\alpha_{2011}}+\frac{1}{\beta_{2011}}$$

Problema 2.15. Evalúa la suma

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{n}{n^4+n^2+1}$$

Problema 2.16. Evalúa el producto

$$\prod_{n=2}^{20}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$$

Problema 2.17. Encuentra el valor de

$$\left\lfloor\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100000}}\right\rfloor$$

Donde $\lfloor x\rfloor$ representa la parte entera de x

§3 Hints

2.1. Cada término queda como $\frac{2(n+1-n)}{n(n+1)}$

2.2. $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2-n}{(n+2)n}\right)$

2.3. Multiplica a cada término por $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

2.4. $\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+2)(n+1)}$

2.5. Nota que $(k+1)! = (k+1)k!$

2.6. $\frac{1}{F_{k-1}F_k} = \frac{F_{k+1}-F_k}{F_k} \cdot \frac{1}{F_{k-1}F_k}$

2.7. Nota que $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$, ¿A qué se parece el segundo término?

2.8. ¿Cuánto vale $f(x) - f(1-x)$

2.9. ¿Cuánto vale $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right))$?

2.10. Mira que pasa si multiplicas por $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

2.11. Multiplica cada término por $\frac{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}$. ¿Cuánto vale $\frac{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})^2}{2}$

2.12. Trata de racionalizar ambos productos

2.13. Demuestra que $1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n(n+1)+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

2.15. Nota que $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$, busca una manera de convertirlo en una suma telescópica, (analiza algunos valores de $n^2 - n + 1$ y $n^2 + n + 1$ para darte una idea)

2.16. Es similar al problema anterior, factoriza $n^3 - 1$ y $n^3 + 1$ y trata de probar que se cancelan varios términos

2.17. Demuestra que $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ y suma todas las desigualdad para cada k